Supraleitung-Fact-Sheet, Daniel Grumiller, WS18/19

Geladenes Skalarfeld und Maxwellfeld

Betrachten Lagrangedichte für $U(1)$ Eichfeld A_μ und komplexes Skalarfeld Φ

$$\mathcal{L}(A_\mu,\,\Phi) = -\frac{1}{16\pi}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\big(\nabla^\mu\Phi^*\big)\big(\nabla_\mu\Phi\big) - V(\Phi^*\Phi) \tag{1}$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\nabla_\mu\Phi = (\partial_\mu + igA_\mu)\Phi$ und

$$V = -\frac{\mu^2}{2}\,\Phi^*\Phi + \frac{\lambda}{4}\,(\Phi^*\Phi)^2\,. \tag{2}$$

Kopplungskonstanten sind elektrische Ladung g, Massenparameter μ und Selbstwechselwirkungsstärke λ. Alle Kopplungskonstanten (insbesonders μ) sind reell; zwecks Stabilität $\lambda > 0$ ("Mexican hat potential").

Lagrangedichte (1), (2) ist invariant unter globalen Phasendrehungen, $\Phi \to e^{-ig}\,\Phi$. Auch invariant unter lokalen Phasendrehungen (= Eichtransformationen).

$$\Phi \to e^{-ig\Lambda(x^\nu)}\,\Phi \qquad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda(x^\nu) \tag{3}$$

Bewegungsgleichungen durch Variation der Felder: Variation des Eichfeldes A_μ ergibt inhomogene Maxwellgleichungen.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu \qquad j_\nu = \frac{ig}{2}\,\big(\Phi\nabla_\nu\Phi^* - \Phi^*\nabla_\nu\Phi\big) \tag{4}$$

Variation des Skalarfeldes liefert verallgemeinerte Klein–Gordon Gleichung.

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial V}{\partial\Phi^*} = 0 \tag{5}$$

Eine einfache nicht-triviale Lösung der Bewegungsgleichungen ist

$$A_\mu = 0 \qquad \Phi = ve^{i\eta} \qquad \Rightarrow \qquad F_{\mu\nu} = j_\mu = \nabla_\mu\Phi = 0 \tag{6}$$

wobei der Betrag v und die Phase η konstant sind. Die Klein–Gordon Gleichung (5) bestimmt den Betrag v folgendermassen:

$$\frac{\partial V}{\partial\Phi^*} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\mu^2 + \lambda\Phi^*\Phi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \tag{7}$$

Die Phase η ist unbestimmt und wird im Folgenden Null gesetzt, $\eta = 0$.

Wir betrachten im Weiteren kleine Fluktuationen um die Lösung (6) und parametrisieren das Skalarfeld zweckmässig durch eine Fluktuation im Betrag, $\rho(x^\mu)$, und in der Phase, $\sigma(x^\mu)$.

$$\Phi = \big(v + \rho\big)\,e^{i\sigma/v} \tag{8}$$

Das Potenzial (2) ist unabhängig von den Phasenfluktuationen.

$$V(\Phi) = V(\rho) = -\frac{\mu^2}{2}\,(v+\rho)^2 + \frac{\lambda}{4}\,(v+\rho)^4 = -\frac{\mu^4}{4\lambda} + \mu^2\rho^2 + \mu\sqrt{\lambda}\rho^3 + \frac{\lambda}{4}\rho^4 \tag{9}$$

Deshalb ist die Phasenfluktuation σ, auch bekannt als Nambu–Goldstone Boson, masselos (ist Beispiel für Goldstone Theorem).

Spontane Symmetriebrechung und Supraleitung

Betrachten kinetischen Term für Fluktuationen ρ und σ im Ansatz (8).

$$\frac{1}{2}\,\big(\nabla^\mu\Phi^*\big)\big(\nabla_\mu\Phi\big) = \frac{1}{2}\,\big(\partial^\mu\rho\big)\big(\partial_\mu\rho\big) + \frac{1}{2}\big(gvA_\mu + \partial_\mu\sigma\big)^2\big(1+\frac{\rho}{v}\big)^2 \tag{10}$$

Erster Term gewöhnlicher kinetischer Term für Betragsfluktuationen ρ. Zweiter Term ungewöhnlich; lässt sich wie folgt behandeln. Definieren eichtransformiertes Eichfeld

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{1}{gv}\,\partial_\mu\sigma \tag{11}$$

und erhalten statt dem letzten Term in (10) den Ausdruck

$$\frac{g^2v^2}{2}\,\tilde{A}^\mu\tilde{A}_\mu\big(1+\frac{\rho}{v}\big)^2\,. \tag{12}$$

In quadratischer Ordnung in Feldern ist (12) Masseterm für Eichfeld, mit Masse M gegeben durch

$$M = gv\,. \tag{13}$$

Nambu–Goldstone Boson σ kommt nach Redefinition (11) des Eichfeldes nicht in Wirkung vor. Slogan: "Eichfeld $\tilde{A}_\mu$ hat Nambu–Goldstone Boson σ gegessen und ist massiv" (Freiheitsgrade: $2+1=3+0$). Massives Eichfeld $\tilde{A}_\mu$ hat zusätzliche (longitudinale) Polarisation und bricht Eichsymmetrie. Man spricht von spontaner Symmetriebrechung, da Brechung der Eichsymmetrie durch Lösungen der (eichinvarianten) Feldgleichungen entsteht, d.h. Lösungen haben weniger Symmetrie als Wirkung. Supraleitung ist spontane Symmetriebrechung der $U(1)$ Eichsymmetrie (Ginzburg–Landau Theorie). Im Gegensatz zu BCS keine mikroskopische Erklärung von Supraleitung; Skalarfeld entspricht Cooperpaar, $\Phi \sim e^-e^-$.

Meissnereffekt und London-Eindringtiefe

Eichfeld A_μ verschwindet für Lösung (6); daher ist transformiertes Eichfeld $\tilde{A}_\mu$ gemäss (11) reine Eichung, weshalb im Inneren eines Supraleiters kein Magnetfeld existiert. Dieser Umstand ist als Meissnereffekt bekannt. Man kann ihn auch aus Energiedichte $\mathcal{H}$ des massiven Maxwellfeldes $\tilde{A}_\mu$ herleiten:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \frac{M^2}{2}\tilde{A}_\mu\tilde{A}^\mu \qquad \mathcal{H}_0 \propto E^2 + B^2 \tag{14}$$

Konstantes Magnetfeld impliziert linear ansteigendes $\tilde{A}_\mu$, was durch Massenterm in (14) zu enormer Energiedichte führte. Deshalb sind Magnetfelder energetisch stark unterdrückt in Supraleitern.

Lösungen der Wellengleichung für massive Photonen ($m^2 = 4\pi M^2$)

$$(\partial^2 + m^2)\tilde{A}_\mu = 0 \tag{15}$$

führen zu Yukawa-Potenzial mit charakteristischer Längenskala $1/m$. Diese Länge ist als London-Eindringtiefe bekannt bis zu der Magnetfelder existieren können.