SRT-Fact-Sheet, Daniel Grumiller, WS18/19

Minkowskimetrik, Vektoren, Tensoren (in $D = 3 + 1$)

Einheitenwahl für die Lichtgeschwindigkeit:

$$c = 1 \tag{1}$$

Metrik in Westküstenkonvention in karthesischen Koordinaten (μ, $\nu = 0, 1, 2, 3$):

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \tag{2}$$

Infinitesimales Linienelement, allgemein und in karthesischen Koordinaten:

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \tag{3}$$

Eigenzeit für zeitartige Intervalle ($\mathrm{d}s^2 > 0$):

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{\eta_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu} = \mathrm{d}t\, \sqrt{1 - \Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big)^2 - \Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big)^2 - \Big(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Big)^2} = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} \tag{4}$$

Der γ-Faktor ist also definiert wie folgt:

$$\gamma := \Big[1 - \Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big)^2 - \Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big)^2 - \Big(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Big)^2\Big]^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{5}$$

wobei v^2 das Betragsquadrat der 3-er Geschwindigkeit ist.

Lorentztensoren der Stufe (p, q) [Koordinatenbasis ∂_μ und duale Basis $\mathrm{d}x^\mu$]:

$$T(p, q) := T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_q}\, \mathrm{d}x^{\nu_1}\, \mathrm{d}x^{\nu_2} \dots \mathrm{d}x^{\nu_q} \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_p} \tag{6}$$

Lorentztensoren (6) sind invariant unter Lorentztransformationen $\Lambda^\alpha{}_\beta$ (siehe nächste Seite). Komponenten $T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_q}$ sind nicht invariant, sondern transformieren unter Lorentztransformationen $\Lambda^\alpha{}_\beta$ wie folgt

$$\tilde{T}^{\tilde{\mu}_1\dots\tilde{\mu}_p}{}_{\tilde{\nu}_1\dots\tilde{\nu}_q} = \Lambda^{\tilde{\mu}_1}{}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\tilde{\mu}_p}{}_{\mu_p} \Lambda_{\tilde{\nu}_1}{}^{\nu_1} \dots \Lambda_{\tilde{\nu}_q}{}^{\nu_q} T^{\mu_1\dots\mu_p}{}_{\nu_1\dots\nu_q} \tag{7}$$

Spezialfall 1: (1,0)-Tensoren = 4er-Vektoren:

$$u = u^\mu \partial_\mu \qquad \tilde{u}^{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\tilde{\mu}}{}_\mu u^\mu \tag{8}$$

Spezialfall 2: (0,1)-Tensoren = duale 4er-Vektoren:

$$w = w_\mu\, \mathrm{d}x^\mu \qquad \tilde{w}_{\tilde{\mu}} = \Lambda_{\tilde{\mu}}{}^\mu w_\mu \tag{9}$$

Spezialfall 3: Linienelement/Minkowskimetrik = symmetrischer (0,2)-Tensor

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu \qquad \tilde{\eta}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \Lambda_{\tilde{\mu}}{}^\mu \Lambda_{\tilde{\nu}}{}^\nu \eta_{\mu\nu}\ (= \eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \text{ siehe nächste Seite}) \tag{10}$$

Spezialfall 4: Feldstärketensor = antisymmetrischer (0,2)-Tensor

$$F = F_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu \qquad \tilde{F}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \Lambda_{\tilde{\mu}}{}^\mu \Lambda_{\tilde{\nu}}{}^\nu F_{\mu\nu} \tag{11}$$

Lorentzgruppe (in $D \geq 1+1$)

Lorentztrafos generiert durch Matrizen $\Lambda^\alpha{}_\beta$; Spezialfall von Poincarétrafos = invertierbare Koordinatentrafos $\bar{x}^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$ die Linienelement invariant lassen:

$$(\mathrm{d}x^0)^2 - \sum_{i=1}^{D-1}(\mathrm{d}x^i)^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \overset{!}{=} \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}\bar{x}^\alpha\,\mathrm{d}\bar{x}^\beta = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \tag{12}$$

Differenzieren der Bedingung $\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ergibt $\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0$. Daher:

$$f^\alpha(x^\mu) = \Lambda^\alpha{}_\mu x^\mu + p^\mu \tag{13}$$

Inhomogener Anteil p^μ: Translationen; homogener Anteil $\Lambda^\alpha{}_\mu$: Lorentztrafos. Wegen (10) gilt: $\det\Lambda = \pm 1$. Einschränkung auf $\det\Lambda = +1$: "eigentliche Lorentztrafos" (schliesst z.B. Raumspiegelung $x^1 \to -x^1$ aus).

Eigentliche Lorentztrafos Λ bilden Gruppe

$$\Lambda \in SO(D-1,\,1) \tag{14}$$

[mit Spiegelungen: $O(D-1,\,1)$]. Trafo der 00-Komponente liefert Ungleichung:

$$\eta_{00} = 1 = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0 = \left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \sum_{i=1}^{D-1}\left(\Lambda^i{}_0\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \Lambda^0{}_0 \geq 1 \text{ oder } \Lambda^0{}_0 \leq -1 \tag{15}$$

Einschränkung auf mit Einheit stetig verbundenen Komponente: "orthochrone eigentliche Lorentztrafos" ($\Lambda^0{}_0 \geq 1$). Kurze Sprechweise ab jetzt: "Lorentztrafo".

Klassifikation	orthochron	nicht-orthochron
eigentlich	Λ	$PT\Lambda$
uneigentlich	$P\Lambda$	$T\Lambda$

Λ: Lorentztrafo; P: Raumspiegelung; T: Zeitspiegelung

Physik-Kommentar: Lorentzboosts alleine keine Gruppe (Thomaspräzession!); Rotationen alleine eine Gruppe, $SO(D-1)$.

Infinitesimale Lorentztrafos $\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(L^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta + \mathcal{O}(\omega^2)$ mit $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ liefern Lie-Algebra $so(D-1,\,1)$ für Generatoren $L^{\mu\nu}$; Kommutatorrelationen:

$$[L^{\kappa\lambda},\, L^{\mu\nu}] = \eta^{\lambda\mu}L^{\kappa\nu} - \eta^{\lambda\nu}L^{\kappa\mu} - \eta^{\kappa\mu}L^{\lambda\nu} + \eta^{\kappa\nu}L^{\lambda\mu} \tag{16}$$

Darstellung der Generatoren als lineare homogene Differentialoperatoren erster Ordnung:

$$L^{\mu\nu} = \left(x^\mu\eta^{\nu\lambda} - x^\nu\eta^{\mu\lambda}\right)\partial_\lambda \tag{17}$$

[Lie-Klammer dieser Differentialoperatoren erfüllt Kommutatorrelationen (16).] Spezialfälle: Rotationen $L^{ij} = -x^i\partial_j + x^j\partial_i$; Boosts $L^{i0} = x^i\partial_t + t\partial_i$ (mit $t = x^0$).