Ergänzungsblatt kovariante Form der Maxwellgleichungen

Elektrodynamik I, Daniel Grumiller.

Annahmen/Experimenteller Input. Wir suchen nach Bewegungsgleichungen der Elektrodynamik die manifest Lorentz-kovariant sind. Da elektrische und magnetische Felder sich kovariant in einem antisymmetrischen 2-Tensor, dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, zusammenfassen lassen, müssen das Gleichungen für $F^{\mu\nu}$ sein. Experimentell beobachtet man das Superpositionsprinzip, weshalb die Feldgleichungen linear in $F^{\mu\nu}$ sein müssen. Weiters beobachtet man experimentell unterschiedliche Lösungen für die $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder, je nach Anfangs- und Randbedingungen. Die Gleichungen müssen also (partielle) Differentialgleichungen sein, und nicht bloss algebraisch in $F^{\mu\nu}$. Wenn man zusätzlich der Einfachheit halber annimmt, dass die Gleichungen erster Ordnung in den Ableitungen sind und keine Reibungsterme (Terme ohne Ableitungen auf $F^{\mu\nu}$) haben, dann erhält man den Ansatz $\partial_\mu F_{\alpha\beta} = Q_{\mu\alpha\beta}$, mit Quelltermen $Q_{\mu\alpha\beta}$. Die weitere Annahme, die man treffen muss, ist, dass alle Quellterme 4er-Vektoren sind. Somit erhält man (in 4 Raumzeitdimensionen)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\, j^\nu \tag{1}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\nu F_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}\, j^\mu_{(m)} \tag{2}$$

wobei j^ν der elektrische und $j^\mu_{(m)}$ der magnetische 4er-Strom ist.

Maxwellgleichungen, kovariant. Die klassischen Maxwellgleichungen gehen zusätzlich zu obigen Annahmen davon aus, dass es keine magnetischen 4er-Ströme gibt. Man erhält somit

$$\text{inhomogene Maxwellgleichungen:} \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\, j^\nu \tag{3}$$

$$\text{homogene Maxwellgleichungen:} \qquad \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0 \tag{4}$$

Die Komponenten des 4er-Stroms bezeichnen wir durch $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$. Beachte unsere Wahl, dass $\vec{j}$ mit positivem Vorzeichen in dem 4er-Strom mit oberem Index auftritt. Die Kontinuitätsgleichung folgt sofort aus der Beziehung $\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$:

$$\partial_\nu j^\nu = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0 \tag{5}$$

Maxwellgleichungen in bestimmtem Inertialsystem, kovariant. Gegeben sei ein Beobachter mit 4er-Geschwindigkeit u^μ. Dann kann man bezüglich dieses Beobachters die Maxwellgleichungen kovariant zerlegen in "zeitliche" und "räumliche" Anteile, durch Verwendung des räumlichen Projektors

$$P_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} - \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \qquad \to \qquad P_{\mu\nu}u^\nu = 0 \text{ und } P_\mu{}^\alpha P_\alpha{}^\nu = P_\mu{}^\nu\,. \tag{6}$$

Man erhält dann die vier bekannten Maxwellgleichungen in kovarianter Form:

$$\text{Gauss:} \qquad u_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\, u_\nu j^\nu \tag{7}$$

$$\text{keine } B\text{-Monopole:} \qquad u_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0 \tag{8}$$

$$\text{Ampere/Maxwell:} \qquad P_{\lambda\nu}\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\, P_{\lambda\nu} j^\nu \tag{9}$$

$$\text{Faraday:} \qquad P_{\lambda\mu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0 \tag{10}$$

Maxwellgleichungen in Ruhesystem, 3er-Schreibweise. Nehmen wir nun an, wir befänden uns im Ruhesystem des Beobachters, $u^\mu/c = (1, 0, 0, 0)$. Dann vereinfacht sich der Projektor auf die Matrix $P_{00} = P_{0i} = 0$ und $P_{ij} = -\delta_{ij}$. Wir erhalten dann durch Verwendung der früher hergeleiteten Beziehungen (siehe Ergänzungsblatt "antisymmetrische Tensoren")

$$F^{0i} = E^i \qquad F_{ij} = B^k \,\epsilon_{kij} \tag{11}$$

die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\text{Gauss:} && \partial_i F^{i0} = -\partial_i E^i = \partial_i E_i = 4\pi\,\rho && (12)\\
&\text{keine } B\text{-Monopole:} && \epsilon^{0ijk}\partial_i F_{jk} = \partial_i(\epsilon^{ijk}\,F_{jk}) \propto \partial_i B_i = 0 && (13)\\
&\text{Ampere/Maxwell:} && \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E^i + \epsilon^{jik}\,\partial_j B_k = \frac{4\pi}{c}\,j^i && (14)\\
&\text{Faraday:} && -\,\epsilon^{0ijk}\,\partial_0 F_{jk} + 2\epsilon^{0ijk}\,\partial_j F_{0k} = \frac{2}{c}\frac{\partial}{\partial t}B^i + 2\epsilon^{ijk}\,\partial_j E_k &&\\
& && \propto \epsilon_{ijk}\,\partial_j E_k + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B_i = 0 && (15)
\end{aligned}$$

Hier wurde in manchen Zwischenschritten die Eigenschaft $E^i = -E_i$ (und analog für andere 3er-Komponenten) verwendet, was impliziert dass wir in 3er-Schreibweise übergegangen sind, bei der die Indexposition irrelevant ist. Unter Verwendung von den Definitionen

$$\mathrm{div}\vec{E} := \partial_i E_i \qquad (\mathrm{rot}\vec{E})_i := \epsilon_{ijk}\partial_j E_k \tag{16}$$

und beachtend dass $\vec{E} \sim E_i$, $\vec{B} \sim B_i$ aber $\vec{j} \sim j^i$ (mit oberem Index) erhalten wir schliesslich die Maxwellgleichungen (in Gaussschen Einheiten) in "Standardform":

$$\begin{aligned}
&\text{Gauss:} && \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\,\rho && (17)\\
&\text{keine } B\text{-Monopole:} && \mathrm{div}\vec{B} = 0 && (18)\\
&\text{Ampere/Maxwell:} && \mathrm{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j} && (19)\\
&\text{Faraday:} && \mathrm{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 && (20)
\end{aligned}$$

Lorentzkraftdichte, kovariant und in 3er-Schreibweise. Die Lorentzkraftdichte ist linear in dem Feldstärketensor und den Quellen. Weiters muss sie ein 4er-Vektor sein. Wir definieren daher die kovariante Lorentzkraftdichte wie folgt (mit konventionellem Proportionalitätsfaktor):

$$f^\mu_{(L)} := \frac{1}{c}\,F^{\mu\nu} j_\nu \tag{21}$$

Für die Zeitkomponente erhalten wir

$$f^0_{(L)} = \frac{1}{c}\,F^{0i} j_i = \frac{1}{c}\,E^i j_i = \frac{1}{c}\,E_i j^i = \frac{1}{c}\,\vec{E}\cdot\vec{j} \tag{22}$$

und für die räumlichen Komponenten (wieder ziehen wir im letzten Schritt alle Indices nach unten bis auf den Index von j, die 3er Schreibweise verwendend)

$$f^i_{(L)} = \frac{1}{c}\,F^{i0} j_0 + \frac{1}{c}\,F^{ik} j_k = -E^i \rho + \frac{1}{c}\,\epsilon^{ijk}\,B_k j_j = \rho E_i + \frac{1}{c}\,\epsilon_{ijk}\,j^j B_k\,. \tag{23}$$

Mit Vektorpfeilen dekoriert ergibt sich also für die Lorentzkraftdichte

$$\vec{f}_{(L)} = \rho\,\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{j}\times\vec{B}\,. \tag{24}$$