Lorentz-Algebra-Fact-Sheet, Daniel Grumiller, WS18/19

Lorentzalgebra

Infinitesimale Lorentztrafos (kleines ω)

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta + \omega^\alpha{}_\beta \tag{1}$$

Invarianz der Minkowskimetrik impliziert Antisymmetrie, $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$:

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta} = \big(\delta^\alpha_\mu + \omega^\alpha{}_\mu\big)\big(\delta^\beta_\nu + \omega^\beta{}_\nu\big)\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} + \mathcal{O}(\omega^2) \tag{2}$$

In $D = 3+1$ Dimensionen gilt

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ -\omega_{01} & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{02} & -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{03} & -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} = \sum_{\alpha<\beta} \omega_{\alpha\beta} \big(L^{\alpha\beta}\big)_{\mu\nu} \tag{3}$$

mit den sechs antisymmetrischen Basismatrizen L^{01}, L^{02}, L^{03}, L^{12}, L^{13}, L^{23}

$$\big(L^{01}\big)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \quad \dots \quad \big(L^{23}\big)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \tag{4}$$

die sich prägnant wie folgt definieren lassen:

$$\big(L^{\alpha\beta}\big)_{\mu\nu} = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu = -\big(L^{\beta\alpha}\big)_{\mu\nu} = -\big(L^{\alpha\beta}\big)_{\nu\mu} \tag{5}$$

Daher gilt für infinitesimale Lorentztrafos

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta + \frac{1}{2}\,\omega_{\mu\nu}\big(L^{\mu\nu}\big)^\alpha{}_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda = \mathbb{1} + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \tag{6}$$

mit Lorentzparametern $\omega_{\mu\nu}$ und Lorentzgeneratoren $L^{\mu\nu}$ [in Matrixdarstellung (4)]

Kommutatorrelationen der Lorentzgeneratoren:

$$[L^{\kappa\lambda},\, L^{\mu\nu}] = \eta^{\lambda\mu} L^{\kappa\nu} - \eta^{\lambda\nu} L^{\kappa\mu} - \eta^{\kappa\mu} L^{\lambda\nu} + \eta^{\kappa\nu} L^{\lambda\mu} \tag{7}$$

Verwenden im Weiteren $L^{\mu\nu}$ mit gemischten Indizes, $(L^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = (L^{\mu\nu})_{\gamma\beta}\eta^{\gamma\alpha}$ (Achtung: Vorzeichenwechsel in räumlichen Komponenten!)

Boosts: $K_i := L_{0i}$; Rotationen in drei Raumdimensionen: $L_i := \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} L^{jk}$
Kommutatorrelationen in $D = 4$ (letzter Kommutator ergibt Thomaspräzession):

$$[L_i,\, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k \qquad [L_i,\, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k \qquad [K_i,\, K_j] = -\epsilon_{ijk} L_k \tag{8}$$

komplexe Kombinationen: $L_i^\pm := L_i \pm i K_i$ [Anmerkung: im Komplexen gilt $so(3,1) \simeq so(4) \simeq so(3) \oplus so(3)$]:

$$[L_i^\pm,\, L_j^\pm] = 2\epsilon_{ijk} L_k^\pm \qquad [L_i^+,\, L_j^-] = 0 \tag{9}$$

Gruppe enthält mehr Information als Algebra; kann von Algebra den Teil der Lorentzgruppe rekonstruieren der mit Einheit stetig verbunden ist (also die eigentlichen, orthochronen Lorentztrafos); siehe Rückseite dieses fact sheet!

Endliche Lorentztrafos (eigentlich, orthochron)

Definition der Exponenzialfunktion einer Matrix L:

$$e^L := \lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{1}+\frac{L}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L^n}{n!} \tag{10}$$

Beispiel: Infinitesimale Rotationen um z-Achse (in $D=4$):

$$L_z = L_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Mache n infinitesimale Tranformationen jeweils mit Drehwinkel θ/n; Koordinatenvektor x^μ (lassen t- und z-Komponente weg, da diese nicht transformieren) transformiert wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{1}+\frac{\theta}{n}L_z\right)^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\theta L_z}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{12}$$

Verwende $L_z^{4n} = \mathbb{1}_{2\times 2}$, $L_z^{4n+1} = L_z$, $L_z^{4n+2} = -\mathbb{1}_{2\times 2}$, $L_z^{4n+3} = -L_z$ und Reihendarstellung von Winkelfunktionen ($\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \ldots$, $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots$):

$$e^{\theta L_z} = \mathbb{1}\cos\theta + L_z\sin\theta \tag{13}$$

Zusammen mit dem xy-Teil von (11) ergibt (13) die übliche Drehmatrix für endliche Drehwinkel θ

$$e^{\theta L_z} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{14}$$

Analoge Rechnung für Boosts in x-Richtung:

$$K_x = L_{0x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Dieselbe Rechnung wie oben mit endlichem Boost-Parameter ξ ("Rapidität") und unter Verwendung von $K_x^{2n} = \mathbb{1}_{2\times 2}$, $K_x^{2n+1} = K_x$ ergibt für den relevanten tx-Teil

$$e^{\xi K_x} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi \\ -\sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \tag{16}$$

mit Definitionen $\gamma := \cosh\xi$, $\beta := \tanh\xi$, so dass gilt

$$\begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi \\ -\sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{17}$$

"Geschwindigkeitsadditionstheorem" für Rapiditäten: $\xi_1 + \xi_2 = \xi_{1+2}$

Allgemeine endliche Lorentztrafo (mit $D(D-1)/2$ Parametern $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$):

$$\Lambda = e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}} \tag{18}$$

in $D=4$ gilt: $\omega_{0i} = \xi_i$ und $\omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\theta_k$