Lagrangeformulierung, Daniel Grumiller, WS18/19

Hamiltonsches Prinzip

Mechanik ist eine Feldtheorie in 0+1 Dimensionen (0 Raum-, 1 Zeitdimension); kompakte Beschreibung der Dynamik: Hamiltonsches Prinzip (S: Wirkung, L: Lagrangefunktion, q: verallgemeinerte Koordinate)

$$\delta S[q] = 0 \qquad S[q] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(q(t),\, \dot q(t),\, t) \tag{1}$$

Variationsrechnung: kontinuierliche Version von $\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$ und von $\partial f(q_k) = \sum_i \frac{\partial f(q_k)}{\partial q_i}\, \partial q_i$:

$$\frac{\delta q(t)}{\delta q(t')} = \delta(t-t') \qquad \delta f(q(t)) = \int \mathrm{d}t'\, \frac{\delta f(q(t))}{\delta q(t')}\, \delta q(t') = \frac{\partial f(q(t))}{\partial q(t)}\, \delta q(t) \tag{2}$$

Konservative Kräfte: Lagrangefunktion $L = L(q(t),\, \dot q(t))$ (keine explizite t-Abhängigkeit)

Euler–Lagrange Bewegungsgleichungen

Variation der Wirkung S für beliebig viele verallgemeinerte Koordinaten q_i

$$\delta S[q_i] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L(q_i(t),\, \dot q_i(t)) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \Big[\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\, \delta \dot q_i\Big] = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\, \delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \Big[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big]\delta q_i = 0 \quad \forall \delta q_i \text{ mit } \delta q_i\big|_{t_1} = \delta q_i\big|_{t_2} = 0 \tag{3}$$

liefert Euler–Lagrange Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = 0 \tag{4}$$

Beispiel: wichtiger Spezialfall $L = \sum_i \frac{m}{2}\, \dot q_i^2 - V(q_i)$ ergibt Newtonaxiom

$$-\frac{\partial V}{\partial q_i} = m \ddot q_i \tag{5}$$

unter Berücksichtigung von $\text{Kraft}_i = -\partial V/\partial q_i$

Verallgemeinerung zu Feldtheorie in $D = d+1$ Dimensionen: $t \to x^\mu$, $q_i(t) \to \Phi_i(x^\mu)$, $\dot q_i(t) \to \partial_\nu \Phi_i(x^\mu)$, $L(q_i,\, \dot q_i) \to \mathcal{L}(\Phi_i,\, \partial_\nu \Phi_i)$ ergibt ($\mu,\, \nu = 0, 1, \dots, D-1$)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi_i} = 0 \tag{6}$$

Das sind die Euler–Lagrange Bewegungsgleichungen für Skalarfelder Φ_i.

Noethertheorem

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie der Wirkung $\exists$ Erhaltungsgrösse.

Langer Beweis (in $0+1$ Dimensionen mit einer verallgemeinerten Koordinate q): betrachte infinitesimale Transformationen ($T = T(q,\,\dot q,\,t)$, $Q = Q(q,\,\dot q,\,t)$)

$$t \to \tilde t = t + \delta t \quad q(t) \to \tilde q(\tilde t) = q(t) + \delta q \qquad \delta t = \epsilon\, T \quad \delta q = \epsilon\, Q \qquad \epsilon \ll 1 \tag{7}$$

und definiere

$$\bar\delta q := \tilde q(t) - q(t) = \tilde q(\tilde t) - q(t) - \tilde q(\tilde t) + \tilde q(t) = \delta q - \dot q\,\delta t + \dots \tag{8}$$

Symmetrie: Wirkung invariant (modulo Randtermen) unter Transformation (7)

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\; \underbrace{L(q(t),\,\dot q(t))}_{L} \simeq \int\limits_{\tilde t_1}^{\tilde t_2} \mathrm{d}t\, L(\tilde q(t),\,\dot{\tilde q}(t)) = \int\limits_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} \mathrm{d}t\, \Big[L + \frac{\partial L}{\partial q}\,\bar\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\bar\delta \dot q\Big]$$

$$= L_2\delta t_2 - L_1 \delta t_1 + \int\limits_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\, L + \int\limits_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\; \underbrace{\Big[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot q}\Big]}_{=0}\,\bar\delta q + \int\limits_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\bar\delta q\Big] + \dots$$

Hier bedeutet $\simeq$ Äquivalenz bis auf totale Ableitungsterme; Subtraktion von S auf beiden Seiten und Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung ergibt

$$0 \simeq \int\limits_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\,\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,(\delta q - \dot q\,\delta t)\Big] = \epsilon \int\limits_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\Big(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q\Big)\,T + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,Q\Big] \tag{9}$$

Das schliesst den Beweis ab, denn wir haben soeben gezeigt dass der Noetherstrom J erhalten ist (f ist die Funktion die aus $\simeq$ eine Gleichung macht):

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad J = \Big(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q\Big)\,T + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,Q - f \tag{10}$$

Beispiel 1: $T = 1$, $Q = 0 = f$: $J = L - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q = L - p\dot q = -H$: Hamiltonfunktion H ist Noetherstrom der Zeittranslationsinvarianz (Energieerhaltung)
Beispiel 2: $T = 0 = f$, $Q = 1$: $J = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = p$: Impulserhaltung bei Invarianz unter Translationen von q (analog: Rotationsinvarianz impliziert Drehimpulserhaltung)

Kurzer Beweis (in D Dimensionen mit beliebig vielen Skalarfeldern Φ_i): Symmetrie bedeutet Lagrangedichte $\mathcal{L}$ invariant bis auf totale Ableitung

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu \tag{11}$$

Variation der Lagrangedichte ergibt mit Euler–Lagrangegleichungen (6)

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i}\,\delta\Phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_i}\,\delta\partial_\mu\Phi_i = \delta\Phi_i\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_i} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_i}\,\partial_\mu\delta\Phi_i = \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\,\delta\Phi_i\Big) \tag{12}$$

Subtraktion von (12) und (11) etabliert erhaltenen Noetherstrom

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \qquad J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_i}\,\delta\Phi_i - K^\mu \tag{13}$$