Schwarze Löcher und Zahlentheorie

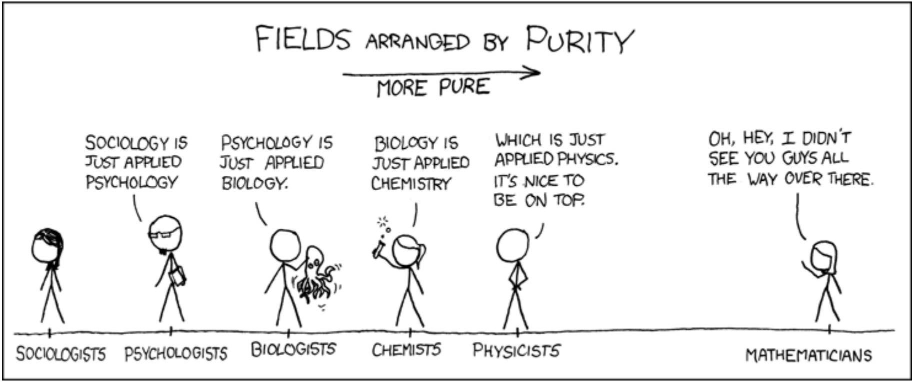
Daniel Grumiller

Institut für Theoretische Physik
TU Wien

TU ForMath, Mai 2019

Mathematik & Physik

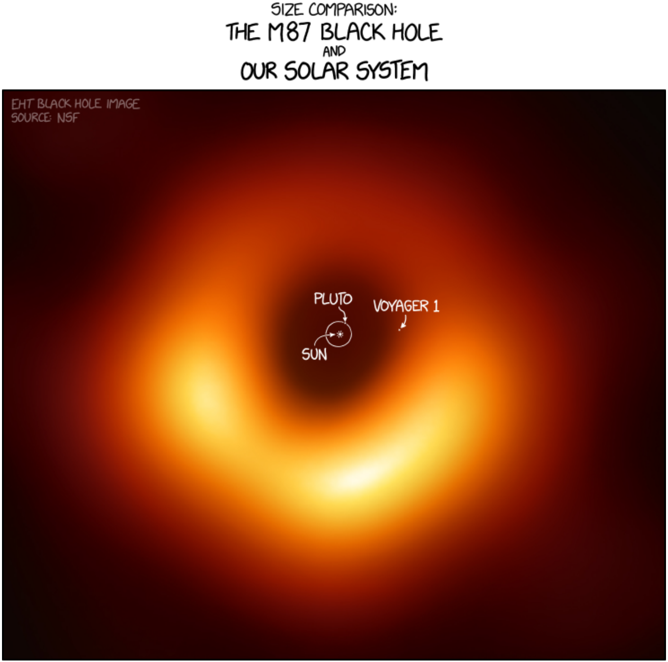
Eine historische Liebesbeziehung



xkcd 435

Outline

Outline



xkcd 2135

Anmerkung: Sonnensystem ca. 40% kleiner als hier dargestellt

Eckdaten:
`Name:` `Schwarzes Loch M87`
`Masse:` $6.5 \cdot 10^9 M_\odot$
$\sim \frac{1}{230}$ `Milchstrasse`
`Radius:` $2.0 \cdot 10^{10}$ `km`
$\sim \frac{1}{2}$ `Million Erdumfänge`
$\sim$ `15 Tausend` $R_\odot$
$\sim$ `130 Astronmische E.`
`Entfernung:` $5.5 \cdot 10^7$ `ly`
$\sim$ `520 Milchstrassen`
`Gastgalaxie: Messier 87`
`Teil des Virgohaufens`

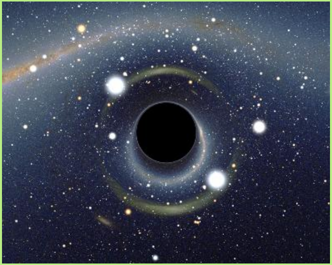
Photo: EHT collaboration
Link: eventhorizontelescope.org

Beteiligte 8 Teleskope:
`ALMA, APEX, IRAM 30-meter Teleskop, James Clerk Maxwell Teleskop, Large Millimeter Teleskop Alfonso Serrano, Submillimeter Array, Submillimeter Teleskop, South Pole Teleskop`

Prolog

Schwarze Löcher haben scheinbar paradoxe Eigenschaften

Schwarze Löcher: die einfachsten Objekte im Universum



Eigenschaften bestimmt durch

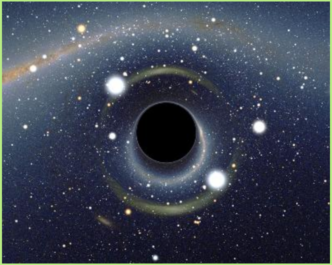
- Masse M
- Drehimpuls J
- Ladung Q

Schwarzes Loch $\sim$ Teilchen!

Prolog

Schwarze Löcher haben scheinbar paradoxe Eigenschaften

Schwarze Löcher: die einfachsten Objekte im Universum

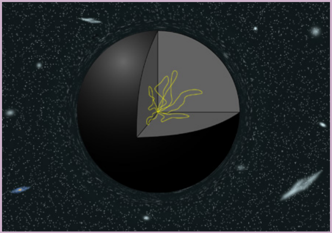


Eigenschaften bestimmt durch

- Masse M
- Drehimpuls J
- Ladung Q

Schwarzes Loch $\sim$ Teilchen!

Schwarze Löcher: die kompliziertesten Objekte im Universum



Quantenmechanik:

- Schwarze Löcher strahlen
- SL haben Entropie S_{BH}
- SL sind holographisch

Bekenstein–Hawking:

$$S_{BH} \sim \frac{A}{4}$$

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit $>$ Lichtgeschw. (J. Mitchell)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit $>$ Lichtgeschw. (J. Mitchell)
irreführend

1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit > Lichtgeschw. (J. Mitchell)

1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)
zu speziell

1931 der Endzustand von Gravitationskollaps (S. Chandrasekhar)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit $>$ Lichtgeschw. (J. Mitchell)

1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)

1931 der Endzustand von Gravitationskollaps (S. Chandrasekhar)
nicht die einzige Möglichkeit

1958 eine semi-permeable Membran (D. Finkelstein)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit > Lichtgeschw. (J. Mitchell)

1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)

1931 der Endzustand von Gravitationskollaps (S. Chandrasekhar)

1958 eine semi-permeable Membran (D. Finkelstein)
gute Definition, aber quantenmechanisch falsch

1963 eine bestimmte stationäre Lösung der Einsteingleichungen (R. Kerr)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit $>$ Lichtgeschw. (J. Mitchell)

1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)

1931 der Endzustand von Gravitationskollaps (S. Chandrasekhar)

1958 eine semi-permeable Membran (D. Finkelstein)

1963 eine bestimmte stationäre Lösung der Einsteingleichungen (R. Kerr)
praktisch für astrophysikalische Zwecke, aber quantenmechanisch nicht anwendbar

'60er "haarlos" (J. Wheeler)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit > Lichtgeschw. (J. Mitchell)

1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)

1931 der Endzustand von Gravitationskollaps (S. Chandrasekhar)

1958 eine semi-permeable Membran (D. Finkelstein)

1963 eine bestimmte stationäre Lösung der Einsteingleichungen (R. Kerr)

'60er "haarlos" (J. Wheeler)

es existieren Gegenbeispiele

1969 ein Schirm gegen Singularitäten (R. Penrose)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit $>$ Lichtgeschw. (J. Mitchell)

1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)

1931 der Endzustand von Gravitationskollaps (S. Chandrasekhar)

1958 eine semi-permeable Membran (D. Finkelstein)

1963 eine bestimmte stationäre Lösung der Einsteingleichungen (R. Kerr)

'60er "haarlos" (J. Wheeler)

1969 ein Schirm gegen Singularitäten (R. Penrose)
es existieren Gegenbeispiele

1972 indirekt nachweisbar durch Röntgenastronomie (C. Bolton; L. Webster & P. Murdin)

1972 ein thermischer Zustand mit grösster Entropie (J. Bekenstein)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit $>$ Lichtgeschw. (J. Mitchell)
1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)
1931 der Endzustand von Gravitationskollaps (S. Chandrasekhar)
1958 eine semi-permeable Membran (D. Finkelstein)
1963 eine bestimmte stationäre Lösung der Einsteingleichungen (R. Kerr)
'60er "haarlos" (J. Wheeler)
1969 ein Schirm gegen Singularitäten (R. Penrose)
1972 indirekt nachweisbar durch Röntgenastronomie (C. Bolton; L. Webster & P. Murdin)
1972 ein thermischer Zustand mit grösster Entropie (J. Bekenstein)
wahrscheinlich richtig, aber unpräzise
1981 ein Objekt das Information vernichtet (S. Hawking)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit $>$ Lichtgeschw. (J. Mitchell)
1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)
1931 der Endzustand von Gravitationskollaps (S. Chandrasekhar)
1958 eine semi-permeable Membran (D. Finkelstein)
1963 eine bestimmte stationäre Lösung der Einsteingleichungen (R. Kerr)
'60er "haarlos" (J. Wheeler)
1969 ein Schirm gegen Singularitäten (R. Penrose)
1972 indirekt nachweisbar durch Röntgenastronomie (C. Bolton; L. Webster & P. Murdin)
1972 ein thermischer Zustand mit grösster Entropie (J. Bekenstein)
1981 ein Objekt das Information vernichtet (S. Hawking) wahrscheinlich falsch
1993 wie ein Hologramm (G. t' Hooft; später L. Susskind)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit $>$ Lichtgeschw. (J. Mitchell)
1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)
1931 der Endzustand von Gravitationskollaps (S. Chandrasekhar)
1958 eine semi-permeable Membran (D. Finkelstein)
1963 eine bestimmte stationäre Lösung der Einsteingleichungen (R. Kerr)
'60er "haarlos" (J. Wheeler)
1969 ein Schirm gegen Singularitäten (R. Penrose)
1972 indirekt nachweisbar durch Röntgenastronomie (C. Bolton; L. Webster & P. Murdin)
1972 ein thermischer Zustand mit grösster Entropie (J. Bekenstein)
1981 ein Objekt das Information vernichtet (S. Hawking)
1993 wie ein Hologramm (G. t' Hooft; später L. Susskind) wahrscheinlich richtig (implementiert in AdS/CFT-Vermutung) aber nicht eindeutig
2000 der effizienteste Quantencomputer (diverse AutorInnen)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit $>$ Lichtgeschw. (J. Mitchell)
1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)
1931 der Endzustand von Gravitationskollaps (S. Chandrasekhar)
1958 eine semi-permeable Membran (D. Finkelstein)
1963 eine bestimmte stationäre Lösung der Einsteingleichungen (R. Kerr)
'60er "haarlos" (J. Wheeler)
1969 ein Schirm gegen Singularitäten (R. Penrose)
1972 indirekt nachweisbar durch Röntgenastronomie (C. Bolton; L. Webster & P. Murdin)
1972 ein thermischer Zustand mit grösster Entropie (J. Bekenstein)
1981 ein Objekt das Information vernichtet (S. Hawking)
1993 wie ein Hologramm (G. t' Hooft; später L. Susskind)
2000 der effizienteste Quantencomputer (diverse AutorInnen) vielleicht richtig
2008 der schnellste Vermischer von Information (Y. Sekino & L. Susskind)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit $>$ Lichtgeschw. (J. Mitchell)
1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)
1931 der Endzustand von Gravitationskollaps (S. Chandrasekhar)
1958 eine semi-permeable Membran (D. Finkelstein)
1963 eine bestimmte stationäre Lösung der Einsteingleichungen (R. Kerr)
'60er "haarlos" (J. Wheeler)
1969 ein Schirm gegen Singularitäten (R. Penrose)
1972 indirekt nachweisbar durch Röntgenastronomie (C. Bolton; L. Webster & P. Murdin)
1972 ein thermischer Zustand mit grösster Entropie (J. Bekenstein)
1981 ein Objekt das Information vernichtet (S. Hawking)
1993 wie ein Hologramm (G. t' Hooft; später L. Susskind)
2000 der effizienteste Quantencomputer (diverse AutorInnen)
2008 der schnellste Vermischer von Information (Y. Sekino & L. Susskind)
vermutlich richtig
2016 direkt nachweisbar durch Gravitationswellen (LIGO)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit > Lichtgeschw. (J. Mitchell)
1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)
1931 der Endzustand von Gravitationskollaps (S. Chandrasekhar)
1958 eine semi-permeable Membran (D. Finkelstein)
1963 eine bestimmte stationäre Lösung der Einsteingleichungen (R. Kerr)
'60er "haarlos" (J. Wheeler)
1969 ein Schirm gegen Singularitäten (R. Penrose)
1972 indirekt nachweisbar durch Röntgenastronomie (C. Bolton; L. Webster & P. Murdin)
1972 ein thermischer Zustand mit grösster Entropie (J. Bekenstein)
1981 ein Objekt das Information vernichtet (S. Hawking)
1993 wie ein Hologramm (G. t' Hooft; später L. Susskind)
2000 der effizienteste Quantencomputer (diverse AutorInnen)
2008 der schnellste Vermischer von Information (Y. Sekino & L. Susskind)
2016 direkt nachweisbar durch Gravitationswellen (LIGO)
2019 erstes Photo eines Schwarzen Lochs (EHT)

Definition eines Schwarzen Lochs (siehe Tafel!)

Definitionen eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch ist

1783 ein Stern mit Fluchtgeschwindigkeit $>$ Lichtgeschw. (J. Mitchell)
1915 eine bestimmte Lösung der Einsteingleichungen (K. Schwarzschild)
1931 der Endzustand von Gravitationskollaps (S. Chandrasekhar)
1958 eine semi-permeable Membran (D. Finkelstein)
1963 eine bestimmte stationäre Lösung der Einsteingleichungen (R. Kerr)
'60er "haarlos" (J. Wheeler)
1969 ein Schirm gegen Singularitäten (R. Penrose)
1972 indirekt nachweisbar durch Röntgenastronomie
1972 ein thermischer Zustand mit grösster Entropie (J. Bekenstein)
1981 ein Objekt das Information vernichtet (S. Hawking)
1993 wie ein Hologramm (G. t' Hooft; später L. Susskind)
2000 der effizienteste Quantencomputer (diverse AutorInnen)
2008 der schnellste Vermischer von Information (Y. Sekino & L. Susskind)
2016 direkt nachweisbar durch Gravitationswellen (LIGO)
2019 erstes Photo eines Schwarzen Lochs (EHT)

Fokus in diesem Vortrag auf Entropie Schwarzer Löcher

Entropie

Idee: erkläre Thermodynamik durch Statistik

Grund:

- makroskopischer Zustand durch wenige Grössen beschrieben (z.B. Temperatur und Druck in diesem Raum)
- mikroskopischer Zustand durch sehr viele Grössen beschrieben (z.B. Orte und Geschwindigkeiten aller Luftmoleküle in diesem Raum)
- "typische" Mikrozustände makroskopisch ununterscheidbar
- Entropie ist Schlüsselgrösse in Thermodynamik

Definition:

- Information eines Ereignisses = (Minus) Logarithmus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

Entropie

Definition:

- Information eines Ereignisses = (Minus) Logarithmus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

Beispiel 1:
Ereignis = Summe von 2 Würfeln

Information dieses Ereignises:

Gesamtergebnis des Wurfs = 6

Entropie

Definition:

- Information eines Ereignisses = (Minus) Logarithmus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

Beispiel 1:
Ereignis = Summe von 2 Würfeln

Gesamtergebnis des Wurfs = 6

Information dieses Ereignises:

- Anzahl aller Zahlenkombinationen: 36

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

Entropie

Definition:

- Information eines Ereignisses = (Minus) Logarithmus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

Beispiel 1:
Ereignis = Summe von 2 Würfeln

Gesamtergebnis des Wurfs = 6

Information dieses Ereignises:

- Anzahl aller Zahlenkombinationen: 36

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

- Anzahl der Kombinationen die 6 ergeben: 5

Entropie

Definition:

- Information eines Ereignisses = (Minus) Logarithmus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

Beispiel 1:
Ereignis = Summe von 2 Würfeln

Gesamtergebnis des Wurfs = 6

Information dieses Ereignises:

- Anzahl aller Zahlenkombinationen: 36
- Anzahl der Kombinationen die 6 ergeben: 5
- Wahrscheinlichkeit des Ereignisses “6 gewürfelt mit 2 Würfeln”: $\frac{5}{36}$

Entropie

Definition:

- Information eines Ereignisses = (Minus) Logarithmus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

Beispiel 1:
Ereignis = Summe von 2 Würfeln

Gesamtergebnis des Wurfs = 6

Information dieses Ereignises:

- Anzahl aller Zahlenkombinationen: 36
- Anzahl der Kombinationen die 6 ergeben: 5
- Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "6 gewürfelt mit 2 Würfeln": $\frac{5}{36}$
- Ergebnis für Information daher

$$-\log\frac{5}{36} \approx 1.97$$

Entropie

Definition:

- Information eines Ereignisses = (Minus) Logarithmus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

Beispiel 2:
Ereignis = Wurf von 2 Würfeln

Information dieses Ereignises:

Würfelwurf (="Mikrozustand")
besteht aus 4 (links) und 2

Entropie

Definition:

- Information eines Ereignisses = (Minus) Logarithmus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

Beispiel 2:
Ereignis = Wurf von 2 Würfeln

Würfelwurf (="Mikrozustand")
besteht aus 4 (links) und 2

Information dieses Ereignises:

- Anzahl aller Zahlenkombinationen: 36

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

Entropie

Definition:

- Information eines Ereignisses = (Minus) Logarithmus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

Beispiel 2:
Ereignis = Wurf von 2 Würfeln

Würfelwurf (="Mikrozustand")
besteht aus 4 (links) und 2

Information dieses Ereignises:

- Anzahl aller Zahlenkombinationen: 36

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

- Anzahl der "Mikrozustände": 1

Entropie

Definition:

- Information eines Ereignisses = (Minus) Logarithmus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

Beispiel 2:
Ereignis = Wurf von 2 Würfeln

Würfelwurf (=“Mikrozustand”)
besteht aus 4 (links) und 2

Information dieses Ereignises:

- Anzahl aller Zahlenkombinationen: 36
- Anzahl der “Mikrozustände”: 1
- Wahrscheinlichkeit des Ereignisses “4 gewürfelt mit linkem Würfel und 2 mit rechtem”: $\frac{1}{36}$

Entropie

Definition:

- Information eines Ereignisses = (Minus) Logarithmus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

Beispiel 2:
Ereignis = Wurf von 2 Würfeln

Würfelwurf (="Mikrozustand")
besteht aus 4 (links) und 2

Information dieses Ereignises:

- Anzahl aller Zahlenkombinationen: 36
- Anzahl der "Mikrozustände": 1
- Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "4 gewürfelt mit linkem Würfel und 2 mit rechtem": $\frac{1}{36}$
- Ergebnis für Information daher

$$-\log\frac{1}{36}\approx 3.58$$

Entropie

Definition:

- Information eines Ereignisses = (Minus) Logarithmus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses
- Entropie $\sim$ "Unordnung" = mittlere zu erwartende Information $=: S$

  Im vorigen Beispiel: jeder Mikrozustand hat dieselbe Information $\Rightarrow$ Entropie (=Informationsmittelwert) gegeben durch diese Information

$$S = \log 36$$

Wer es genau wissen will:

$$S = -\sum_i w_i \log w_i$$

$w_i \in [0,\, 1]$: Wahrscheinlichkeit für i-ten Mikrozustand
Anmerkung 1: sichere Ereignisse $(w_i = 1)$ haben $S = 0$
Anmerkung 2: unmögliche Ereignisse $(w_i \to 0^+)$ tragen nicht bei zu S
Anmerkung 3: Entropie maximal bei Gleichverteilung $w_i = w$, $\forall i$

Entropie

Definition:

- Information eines Ereignisses = (Minus) Logarithmus der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses
- Entropie $\sim$ "Unordnung" = mittlere zu erwartende Information $=: S$

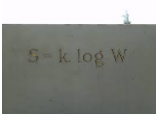
  Im vorigen Beispiel: jeder Mikrozustand hat dieselbe Information $\Rightarrow$ Entropie (=Informationsmittelwert) gegeben durch diese Information

$$S = \log 36$$

- Allgemeiner gilt (bei Gleichverteilung):

$$S = \log W$$

W: Anzahl aller Mikrozustände

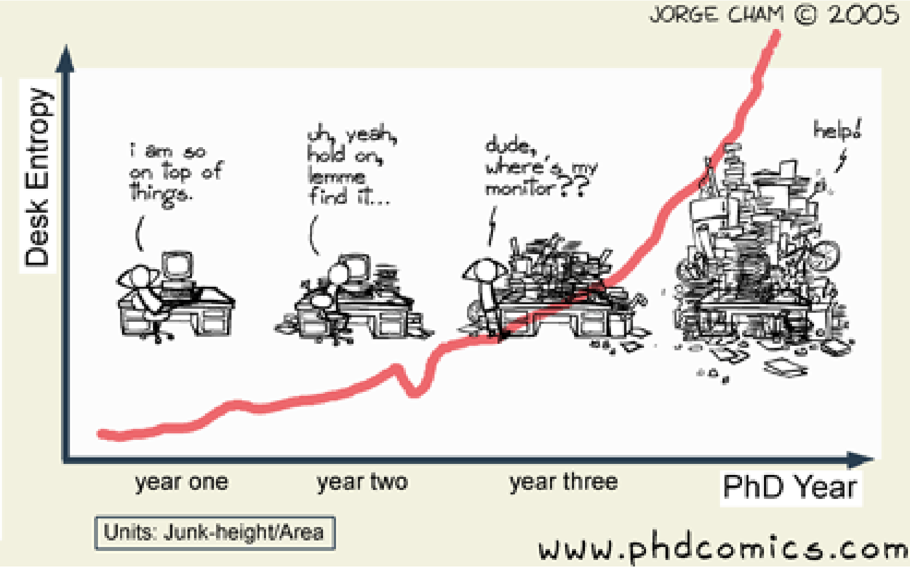


Entropie als Mass für “Unordnung”

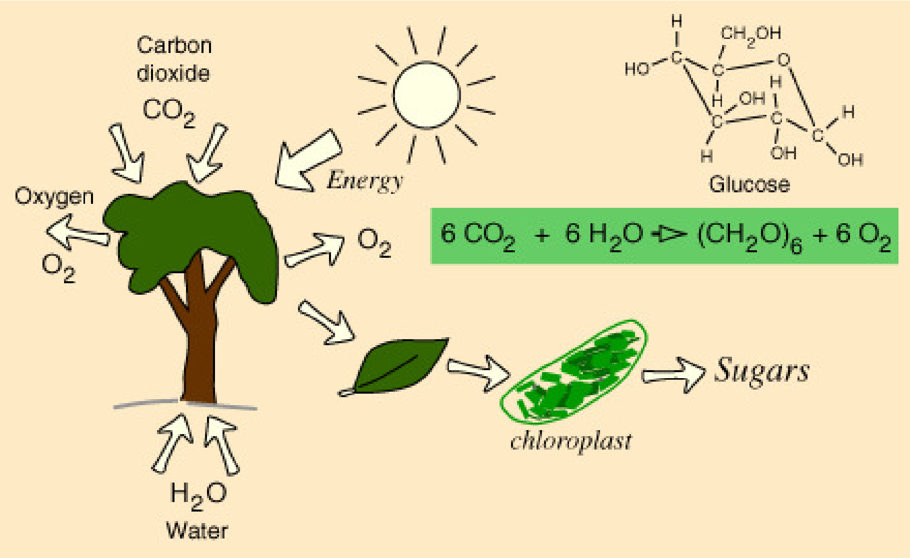
Entropie in Soziologie

Entropie als Mass für "Unordnung"

Entropie in Psychologie

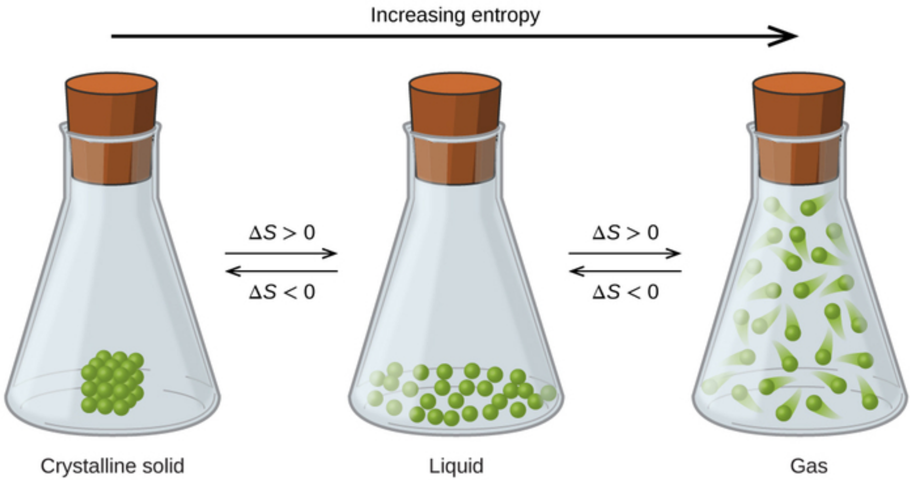


Entropie als Mass für "Unordnung"
Entropie in Biologie



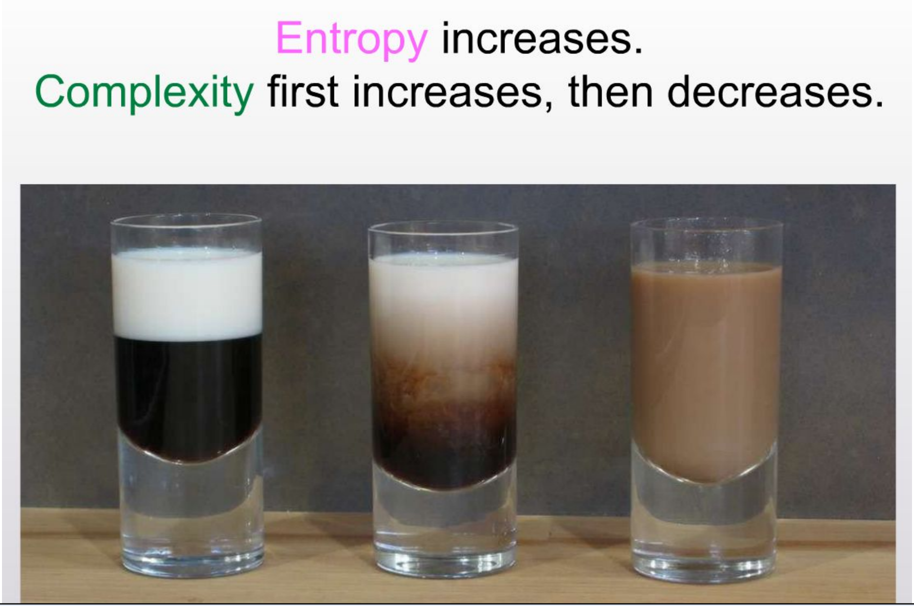
Entropie als Mass für "Unordnung"

Entropie in Chemie



Entropie als Mass für “Unordnung”

Entropie in Physik



Entropie als Mass für “Unordnung”

Entropie in Mathematik

$$S = \log_2 2^N = N = 2$$

Extensivität

Entropie vieler Würfel

- 1 Würfel: $S = \log 6$

Extensivität

Entropie vieler Würfel

- 1 Würfel: $S = \log 6$
- 2 Würfel: $S = \log 6^2 = 2 \log 6$

Extensivität

Entropie vieler Würfel

- 1 Würfel: $S = \log 6$
- 2 Würfel: $S = \log 6^2 = 2 \log 6$
- 3 Würfel: $S = \log 6^3 = 3 \log 6$

Extensivität

Entropie vieler Würfel

- 1 Würfel: $S = \log 6$
- 2 Würfel: $S = \log 6^2 = 2 \log 6$
- 3 Würfel: $S = \log 6^3 = 3 \log 6$
- N Würfel: $S = \log 6^N = N \log 6 \propto N$

Extensivität

Entropie vieler Würfel

- 1 Würfel: $S = \log 6$
- 2 Würfel: $S = \log 6^2 = 2 \log 6$
- 3 Würfel: $S = \log 6^3 = 3 \log 6$
- N Würfel: $S = \log 6^N = N \log 6 \propto N$
- ersetze Würfel durch Luftmoleküle: $S = \log w^N = N \log w \propto N$

Extensivität

Entropie vieler Würfel

- 1 Würfel: $S = \log 6$
- 2 Würfel: $S = \log 6^2 = 2 \log 6$
- 3 Würfel: $S = \log 6^3 = 3 \log 6$
- N Würfel: $S = \log 6^N = N \log 6 \propto N$
- ersetze Würfel durch Luftmoleküle: $S = \log w^N = N \log w \propto N$
- Beispiel: Entropie dieses Raumes: $N \approx 10^{25}$, d.h. ca.$10^{10^{25}}$ Mikrozustände, daher $S \approx 10^{25}$

Extensivität

Entropie vieler Würfel

- 1 Würfel: $S = \log 6$
- 2 Würfel: $S = \log 6^2 = 2\log 6$
- 3 Würfel: $S = \log 6^3 = 3\log 6$
- N Würfel: $S = \log 6^N = N\log 6 \propto N$
- ersetze Würfel durch Luftmoleküle: $S = \log w^N = N\log w \propto N$
- Beispiel: Entropie dieses Raumes: $N \approx 10^{25}$, d.h. ca.$10^{10^{25}}$ Mikrozustände, daher $S \approx 10^{25}$
- Verdoppelung des Volumens verdoppelt N und daher auch S

Extensivität

Entropie vieler Würfel

- 1 Würfel: $S = \log 6$
- 2 Würfel: $S = \log 6^2 = 2 \log 6$
- 3 Würfel: $S = \log 6^3 = 3 \log 6$
- N Würfel: $S = \log 6^N = N \log 6 \propto N$
- ersetze Würfel durch Luftmoleküle: $S = \log w^N = N \log w \propto N$
- Beispiel: Entropie dieses Raumes: $N \approx 10^{25}$, d.h. ca.$10^{10^{25}}$ Mikrozustände, daher $S \approx 10^{25}$
- Verdoppelung des Volumens verdoppelt N und daher auch S

Konsequenz

Entropie ist proportional zum Volumen in d Raumdimensionen

$$S \propto V \propto L^d$$

Diese Eigenschaft heisst “Extensivität”

Bekenstein–Hawking Entropie

Überraschungen bei Entropie Schwarzer Löcher:

- Entropie proportional zur Fläche des Horizontes

Bekenstein–Hawking Entropie

Überraschungen bei Entropie Schwarzer Löcher:

- Entropie proportional zur Fläche des Horizontes
- Als Formel:

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4} \propto L^{d-1}$$

  A: hier gemessen in Planckeinheiten

Bekenstein–Hawking Entropie

Überraschungen bei Entropie Schwarzer Löcher:

- Entropie proportional zur Fläche des Horizontes
- Als Formel:

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4} \propto L^{d-1}$$

  A: hier gemessen in Planckeinheiten

- Entropie sehr gross für typische Schwarze Löcher, $S \approx 10^{77}$

Bekenstein–Hawking Entropie

Überraschungen bei Entropie Schwarzer Löcher:

- Entropie proportional zur Fläche des Horizontes
- Als Formel:

$$S_{\rm BH} = \frac{A}{4} \propto L^{d-1}$$

  A: hier gemessen in Planckeinheiten
- Entropie sehr gross für typische Schwarze Löcher, $S \approx 10^{77}$
- Anzahl der Mikrozustände Schwarzer Löcher gigantisch, $N \approx 10^{10^{77}}$

Bekenstein–Hawking Entropie

Überraschungen bei Entropie Schwarzer Löcher:

- Entropie proportional zur Fläche des Horizontes
- Als Formel:

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4} \propto L^{d-1}$$

  A: hier gemessen in Planckeinheiten
- Entropie sehr gross für typische Schwarze Löcher, $S \approx 10^{77}$
- Anzahl der Mikrozustände Schwarzer Löcher gigantisch, $N \approx 10^{10^{77}}$
- vollkommen unklar was diese Mikrozustände sind!

Bekenstein–Hawking Entropie

Überraschungen bei Entropie Schwarzer Löcher:

- Entropie proportional zur Fläche des Horizontes
- Als Formel:
$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4} \propto L^{d-1}$$
A: hier gemessen in Planckeinheiten
- Entropie sehr gross für typische Schwarze Löcher, $S \approx 10^{77}$
- Anzahl der Mikrozustände Schwarzer Löcher gigantisch, $N \approx 10^{10^{77}}$
- vollkommen unklar was diese Mikrozustände sind!
- scheint im Widerspruch zur Einfachheit Schwarzer Löcher

Bekenstein–Hawking Entropie

Überraschungen bei Entropie Schwarzer Löcher:

- Entropie proportional zur Fläche des Horizontes
- Als Formel:
$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4} \propto L^{d-1}$$
A: hier gemessen in Planckeinheiten
- Entropie sehr gross für typische Schwarze Löcher, $S \approx 10^{77}$
- Anzahl der Mikrozustände Schwarzer Löcher gigantisch, $N \approx 10^{10^{77}}$
- vollkommen unklar was diese Mikrozustände sind!
- scheint im Widerspruch zur Einfachheit Schwarzer Löcher
- kompatibel mit Hawking's Flächensatz und 2. Hauptsatz der Thermodynamik
$$\delta S \geq 0$$

Bekenstein–Hawking Entropie

Überraschungen bei Entropie Schwarzer Löcher:

- Entropie proportional zur Fläche des Horizontes
- Als Formel:

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4} \propto L^{d-1}$$

  A: hier gemessen in Planckeinheiten

- Entropie sehr gross für typische Schwarze Löcher, $S \approx 10^{77}$
- Anzahl der Mikrozustände Schwarzer Löcher gigantisch, $N \approx 10^{10^{77}}$
- vollkommen unklar was diese Mikrozustände sind!
- scheint im Widerspruch zur Einfachheit Schwarzer Löcher
- kompatibel mit Hawking's Flächensatz und 2. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\delta S \geq 0$$

- S_{BH} nicht extensiv

Holographisches Prinzip

't Hooft 1993 und Susskind 1995

- Vergleiche Entropie gewöhnlicher (Quanten-) Theorien in d Dimensionen (ohne Gravitation)

$$S \propto L^d$$

mit Bekenstein–Hawking Entropie in D Dimensionen (notwendigerweise mit Gravitation)

$$S_{\text{BH}} \propto L^{D-1}$$

Holographisches Prinzip

't Hooft 1993 und Susskind 1995

- Vergleiche Entropie gewöhnlicher (Quanten-) Theorien in d Dimensionen (ohne Gravitation)

  $$S \propto L^d$$

  mit Bekenstein–Hawking Entropie in D Dimensionen (notwendigerweise mit Gravitation)

  $$S_{\mathrm{BH}} \propto L^{D-1}$$

- Wenn $D = d + 1$: Gleichheit $S = S_{\mathrm{BH}}$ möglich

Holographisches Prinzip
't Hooft 1993 und Susskind 1995

- Vergleiche Entropie gewöhnlicher (Quanten-) Theorien in d Dimensionen (ohne Gravitation)

$$S \propto L^d$$

mit Bekenstein–Hawking Entropie in D Dimensionen (notwendigerweise mit Gravitation)

$$S_{\mathrm{BH}} \propto L^{D-1}$$

- Wenn $D = d + 1$: Gleichheit $S = S_{\mathrm{BH}}$ möglich

Holographisches Prinzip

Quantengravitation in $D = d + 1$ Dimensionen äquivalent zu Quantentheorie (ohne Gravitation) in d Dimensionen

Einige offene Fragen zur Bekenstein–Hawking Entropie

- Kann die Formel
$$S_{\rm BH} = \frac{A}{4}$$
statistisch erklärt werden?

Einige offene Fragen zur Bekenstein–Hawking Entropie

- Kann die Formel
$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4}$$
statistisch erklärt werden?
- Wenn ja, wie?

Einige offene Fragen zur Bekenstein–Hawking Entropie

- Kann die Formel
$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4}$$
statistisch erklärt werden?
- Wenn ja, wie?
- Was sind die Mikrozustände eines Schwarzen Loches?

Einige offene Fragen zur Bekenstein–Hawking Entropie

- Kann die Formel

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4}$$

  statistisch erklärt werden?
- Wenn ja, wie?
- Was sind die Mikrozustände eines Schwarzen Loches?
- Kann man die Mikrozustände effizient abzählen?

Einige offene Fragen zur Bekenstein–Hawking Entropie

- Kann die Formel
$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4}$$
statistisch erklärt werden?
- Wenn ja, wie?
- Was sind die Mikrozustände eines Schwarzen Loches?
- Kann man die Mikrozustände effizient abzählen?
- Gibt es Quantenkorrekturen zu obiger Formel?

Einige offene Fragen zur Bekenstein–Hawking Entropie

- Kann die Formel
$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4}$$
statistisch erklärt werden?
- Wenn ja, wie?
- Was sind die Mikrozustände eines Schwarzen Loches?
- Kann man die Mikrozustände effizient abzählen?
- Gibt es Quantenkorrekturen zu obiger Formel?
- Warum gilt obige Formel so universell?

Einige offene Fragen zur Bekenstein–Hawking Entropie

- Kann die Formel
$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4}$$
statistisch erklärt werden?
- Wenn ja, wie?
- Was sind die Mikrozustände eines Schwarzen Loches?
- Kann man die Mikrozustände effizient abzählen?
- Gibt es Quantenkorrekturen zu obiger Formel?
- Warum gilt obige Formel so universell?

Etliche offene Fragen
Antworten mit Hilfe von Zahlentheorie und Kombinatorik

Einige offene Fragen zur Bekenstein–Hawking Entropie

- Kann die Formel

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4}$$

statistisch erklärt werden?
- Wenn ja, wie?
- Was sind die Mikrozustände eines Schwarzen Loches?
- Kann man die Mikrozustände effizient abzählen?
- Gibt es Quantenkorrekturen zu obiger Formel?
- Warum gilt obige Formel so universell?

Etliche offene Fragen
Antworten mit Hilfe von Zahlentheorie und Kombinatorik

TU Wien Strategie:
Betrachten Spezialfall Schwarzer Löcher in zwei Raumdimensionen

Outline

Abzählen natürlicher Zahlen

Rätsel: was ist $p(N)$?

1. 1 $\qquad$ $p(1) = 1$

Abzählen natürlicher Zahlen

Rätsel: was ist $p(N)$?

1. 1 $\qquad p(1) = 1$
2. $2 = 1 + 1$ $\qquad p(2) = 2$

Abzählen natürlicher Zahlen

Rätsel: was ist $p(N)$?

1. 1 $\qquad p(1) = 1$
2. $2 = 1 + 1$ $\qquad p(2) = 2$
3. $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ $\qquad p(3) = 3$

Abzählen natürlicher Zahlen

Rätsel: was ist $p(N)$?

1. 1 $\qquad p(1) = 1$
2. $2 = 1 + 1$ $\qquad p(2) = 2$
3. $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ $\qquad p(3) = 3$
4. $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ $\qquad p(4) = 5$

Abzählen natürlicher Zahlen

Rätsel: was ist $p(N)$?

1. 1 $\quad p(1) = 1$
2. $2 = 1 + 1$ $\quad p(2) = 2$
3. $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ $\quad p(3) = 3$
4. $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ $\quad p(4) = 5$
5. $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 =$
   $= 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ $\quad p(5) = 7$

Abzählen natürlicher Zahlen

Rätsel: was ist $p(N)$?

1. 1 $\qquad p(1) = 1$
2. $2 = 1 + 1$ $\qquad p(2) = 2$
3. $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ $\qquad p(3) = 3$
4. $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ $\qquad p(4) = 5$
5. $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 =$
   $= 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ $\qquad p(5) = 7$
6. $6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 = 3 + 2 + 1 =$
   $= 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 1 + 1 =$
   $= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ $\qquad p(6) = 11$

Abzählen natürlicher Zahlen

Rätsel: was ist $p(N)$?

1. 1 $\qquad p(1) = 1$
2. $2 = 1 + 1$ $\qquad p(2) = 2$
3. $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ $\qquad p(3) = 3$
4. $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ $\qquad p(4) = 5$
5. $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 =$
   $= 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ $\qquad p(5) = 7$
6. $6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 = 3 + 2 + 1 =$
   $= 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 1 + 1 =$
   $= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ $\qquad p(6) = 11$

Auflösung: $p(N)$ ist Anzahl der Arten in der N als Summe positiver ganzer Zahlen geschrieben werden kann

Sprechweise für $p(N)$: Partitionen von N

on-line encyclopedia of integer sequences: `A000041`

Abzählen natürlicher Zahlen

Rätsel: was ist $p(N)$?

1. 1 $\qquad p(1)=1$
2. $2=1+1$ $\qquad p(2)=2$
3. $3=2+1=1+1+1$ $\qquad p(3)=3$
4. $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$ $\qquad p(4)=5$
5. $5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=$
   $=2+1+1+1=1+1+1+1+1$ $\qquad p(5)=7$
6. $6=5+1=4+2=4+1+1=3+3=3+2+1=$
   $=3+1+1+1=2+2+2=2+2+1+1=$
   $=2+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1$ $\qquad p(6)=11$
7. p(7)=15, p(8)=22, p(9)=30, p(10)=42, . . . , p(42)=53174, . . .

> Wie geht es weiter für grosse Zahlen? $\qquad p(N)|_{N\gg 1}=?$

Abzählen natürlicher Zahlen

Rätsel: was ist $p(N)$?

1. 1 $\qquad p(1)=1$
2. $2=1+1$ $\qquad p(2)=2$
3. $3=2+1=1+1+1$ $\qquad p(3)=3$
4. $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$ $\qquad p(4)=5$
5. $5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=$
   $=2+1+1+1=1+1+1+1+1$ $\qquad p(5)=7$
6. $6=5+1=4+2=4+1+1=3+3=3+2+1=$
   $=3+1+1+1=2+2+2=2+2+1+1=$
   $=2+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1$ $\qquad p(6)=11$
7. p(7)=15, p(8)=22, p(9)=30, p(10)=42, ..., p(42)=53174, ...

Wie geht es weiter für grosse Zahlen? $\qquad p(N)|_{N\gg 1} = ?$

Hardy–Ramanujan 1918:

$$p(N)|_{N\gg 1} \approx \frac{1}{4N\sqrt{3}}\, e^{2\pi\sqrt{N/6}}$$

Outline

Mikrozustände aus weichem Heisenberghaar

Von "haarlos" zu "weichem Haar":

- Wheeler $\sim$1970: "Schwarze Löcher haben keine Haare"

  gemeint ist: Schwarze Löcher haben keine Eigenschaften ausser Masse, Drehimpuls und Ladung

Mikrozustände aus weichem Heisenberghaar

Von "haarlos" zu "weichem Haar":

- Wheeler $\sim$1970: "Schwarze Löcher haben keine Haare"

  gemeint ist: Schwarze Löcher haben keine Eigenschaften ausser Masse, Drehimpuls und Ladung
- Hawking, Perry, Strominger 2016:
  Schwarze Löcher könnten "weiche Haare" haben

  gemeint ist: Schwarze Löcher könnten energielose Anregungen haben

Von "haarlos" zu "weichem Haar":

- Wheeler $\sim$1970: "Schwarze Löcher haben keine Haare"

  gemeint ist: Schwarze Löcher haben keine Eigenschaften ausser Masse, Drehimpuls und Ladung
- Hawking, Perry, Strominger 2016:
  Schwarze Löcher könnten "weiche Haare" haben

  gemeint ist: Schwarze Löcher könnten energielose Anregungen haben
- Afshar, Detournay, Grumiller, Merbis, Perez, Tempo, Troncoso 2016:
  Schwarze Löcher in zwei Raumdimensionen haben weiche Haare!

  Beweis durch explizite Rechnung

Mikrozustände aus weichem Heisenberghaar

Von “haarlos” zu “weichem Haar”:

- Wheeler $\sim$1970: “Schwarze Löcher haben keine Haare”

  gemeint ist: Schwarze Löcher haben keine Eigenschaften ausser Masse, Drehimpuls und Ladung
- Hawking, Perry, Strominger 2016:
  Schwarze Löcher könnten “weiche Haare” haben

  gemeint ist: Schwarze Löcher könnten energielose Anregungen haben
- Afshar, Detournay, Grumiller, Merbis, Perez, Tempo, Troncoso 2016:
  Schwarze Löcher in zwei Raumdimensionen haben weiche Haare!

  Beweis durch explizite Rechnung
- Afshar, Grumiller, Sheikh-Jabbari 2016: Weiche (Heisenberg-)Haare könnten Mikrozustände Schwarzer Löcher ergeben

  Vermutung, inspiriert durch physikalische Überlegungen und holographisches Prinzip

Abzählen der Mikrozustände

1. Ein weiches Haar: 1 Mikrozustand

Abzählen der Mikrozustände

1. Ein weiches Haar: 1 Mikrozustand
2. Zwei weiche Haare: 2 Mikrozustände

Abzählen der Mikrozustände

1. Ein weiches Haar: 1 Mikrozustand
2. Zwei weiche Haare: 2 Mikrozustände
3. Drei weiche Haare: 3 Mikrozustände

Abzählen der Mikrozustände

1. Ein weiches Haar: 1 Mikrozustand
2. Zwei weiche Haare: 2 Mikrozustände
3. Drei weiche Haare: 3 Mikrozustände
4. Vier weiche Haare: 5 Mikrozustände

Abzählen der Mikrozustände

1. Ein weiches Haar: 1 Mikrozustand
2. Zwei weiche Haare: 2 Mikrozustände
3. Drei weiche Haare: 3 Mikrozustände
4. Vier weiche Haare: 5 Mikrozustände
5. Fünf weiche Haare: 7 Mikrozustände

Abzählen der Mikrozustände

1. Ein weiches Haar: 1 Mikrozustand
2. Zwei weiche Haare: 2 Mikrozustände
3. Drei weiche Haare: 3 Mikrozustände
4. Vier weiche Haare: 5 Mikrozustände
5. Fünf weiche Haare: 7 Mikrozustände
6. Sechs weiche Haare: 11 Mikrozustände

... ...

Abzählen der Mikrozustände

1. Ein weiches Haar: 1 Mikrozustand
2. Zwei weiche Haare: 2 Mikrozustände
3. Drei weiche Haare: 3 Mikrozustände
4. Vier weiche Haare: 5 Mikrozustände
5. Fünf weiche Haare: 7 Mikrozustände
6. Sechs weiche Haare: 11 Mikrozustände

... ...

N. N weiche Haare: $p(N)$ Mikrozustände

Abzählen der Mikrozustände

1. Ein weiches Haar: 1 Mikrozustand
2. Zwei weiche Haare: 2 Mikrozustände
3. Drei weiche Haare: 3 Mikrozustände
4. Vier weiche Haare: 5 Mikrozustände
5. Fünf weiche Haare: 7 Mikrozustände
6. Sechs weiche Haare: 11 Mikrozustände

... ...

N. N weiche Haare: $p(N)$ Mikrozustände

Dasselbe Problem wie das von Hardy und Ramanujan gelöste!

Abzählen der Mikrozustände

1. Ein weiches Haar: 1 Mikrozustand
2. Zwei weiche Haare: 2 Mikrozustände
3. Drei weiche Haare: 3 Mikrozustände
4. Vier weiche Haare: 5 Mikrozustände
5. Fünf weiche Haare: 7 Mikrozustände
6. Sechs weiche Haare: 11 Mikrozustände

... ...

N. N weiche Haare: $p(N)$ Mikrozustände

> Dasselbe Problem wie das von Hardy und Ramanujan gelöste!

Resultat für Entropie daher:

$$S = \log p(N)$$

Preisfrage: ergibt das die richtige Entropie eines Schwarzen Lochs?

Vergleich mikroskopischer und makroskopischer Entropie Schwarzer Löcher

- Mikroskopisch (Hardy–Ramanujan):

$$S = \log p(N) = 2\pi \sqrt{\frac{N}{6}} - \log N + \dots$$

Zur Erinnerung:

$$p(N)|_{N \gg 1} \approx \frac{1}{4N\sqrt{3}}\, e^{2\pi\sqrt{N/6}}$$

Vergleich mikroskopischer und makroskopischer Entropie Schwarzer Löcher

- Mikroskopisch (Hardy–Ramanujan):

$$S = \log p(N) = 2\pi\sqrt{\frac{N}{6}} - \log N + \dots$$

- Makroskopisch (Bekenstein–Hawking):

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4}$$

Vergleich mikroskopischer und makroskopischer Entropie Schwarzer Löcher

- Mikroskopisch (Hardy–Ramanujan):

$$S = \log p(N) = 2\pi \sqrt{\frac{N}{6}} - \log N + \dots$$

- Makroskopisch (Bekenstein–Hawking):

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4}$$

- Einsetzen für N (abhängig von Fläche A) ergibt

$$S = \frac{A}{4} - 2\log A + \dots$$

Vergleich mikroskopischer und makroskopischer Entropie Schwarzer Löcher

- Mikroskopisch (Hardy–Ramanujan):

$$S = \log p(N) = 2\pi\sqrt{\frac{N}{6}} - \log N + \dots$$

- Makroskopisch (Bekenstein–Hawking):

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4}$$

- Einsetzen für N (abhängig von Fläche A) ergibt

$$S = \frac{A}{4} - 2\log A + \dots$$

- Für grosse Schwarze Löcher ($A \gg 1$) richtiges Resultat!

Vergleich mikroskopischer und makroskopischer Entropie Schwarzer Löcher

- Mikroskopisch (Hardy–Ramanujan):

$$S = \log p(N) = 2\pi \sqrt{\frac{N}{6}} - \log N + \dots$$

- Makroskopisch (Bekenstein–Hawking):

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4} - 2 \log A + \dots$$

- Einsetzen für N (abhängig von Fläche A) ergibt

$$S = \frac{A}{4} - 2 \log A + \dots$$

- Für grosse Schwarze Löcher ($A \gg 1$) richtiges Resultat!
- Auch Quantenkorrekturen korrekt!

Vergleich mikroskopischer und makroskopischer Entropie Schwarzer Löcher

- Mikroskopisch (Hardy–Ramanujan):

$$S = \log p(N) = 2\pi\sqrt{\frac{N}{6}} - \log N + \dots$$

- Makroskopisch (Bekenstein–Hawking):

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4} - 2\log A + \dots$$

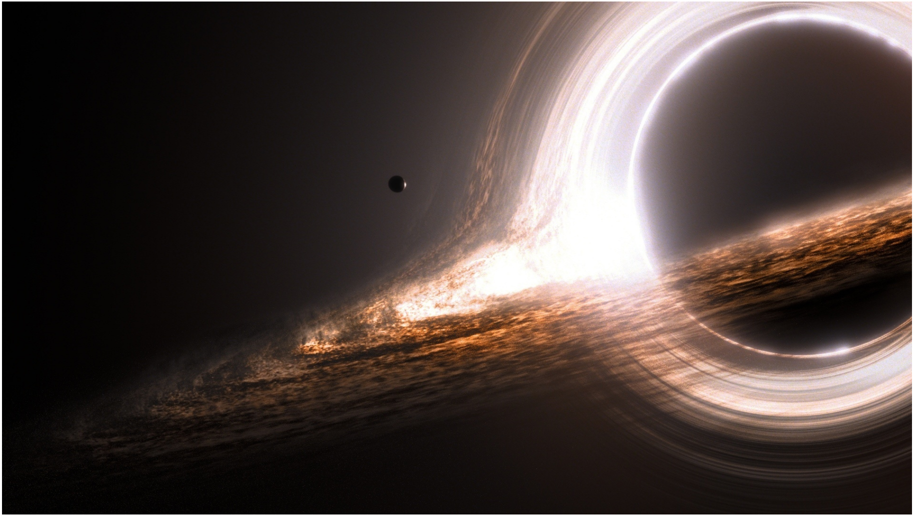
- Einsetzen für N (abhängig von Fläche A) ergibt

$$S = \frac{A}{4} - 2\log A + \dots$$

> - Für grosse Schwarze Löcher ($A \gg 1$) richtiges Resultat!
> - Auch Quantenkorrekturen korrekt!
> - Zahlentheorie hilft Entropie Schwarzer Löcher zu erklären

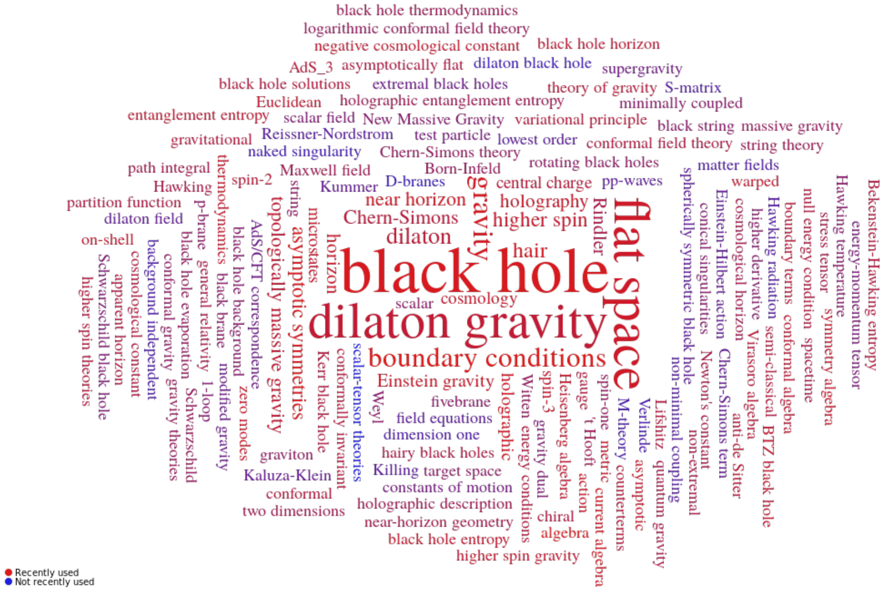
Schwarze Löcher sind ein faszinierendes Forschungsgebiet

Zukünftige Beobachtungen vielleicht einmal so genau wie numerische Simulationen



Simulation eines rotierenden Schwarzen Loches (Interstellar)

Danke für die Aufmerksamkeit!



source: word cloud “Daniel Grumiller” at https://scimeter.org/clouds/

Anmerkungen zur Hardy–Ramanujan Formel

Wie genau gilt die Formel

$$p(N)|_{N\gg 1} \approx \frac{1}{4N\sqrt{3}}\, e^{2\pi\sqrt{N/6}} =: p_{\text{HR}}(N)$$

und ab wann ist N “gross genug”?

Anmerkungen zur Hardy–Ramanujan Formel

Wie genau gilt die Formel

$$p(N)|_{N\gg 1} \approx \frac{1}{4N\sqrt{3}}\, e^{2\pi\,\sqrt{N/6}} =: p_{\text{HR}}(N)$$

und ab wann ist N "gross genug"?

- Probiere Zahlen ab 20:

$$p(20) = 627 \qquad p_{\text{HR}}(20) \approx 692,4 \qquad \frac{p_{\text{HR}} - p}{p} \approx 0.1$$

$$p(21) = 792 \qquad p_{\text{HR}}(21) \approx 875.4 \qquad \frac{p_{\text{HR}} - p}{p} \approx 0.1$$

$$p(22) = 1002 \qquad p_{\text{HR}}(22) \approx 1101.8 \qquad \frac{p_{\text{HR}} - p}{p} \approx 0.1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$p(42) = 53174 \qquad p_{\text{HR}}(42) \approx 56981.1 \qquad \frac{p_{\text{HR}} - p}{p} \approx 0.07$$

relativer Fehler wird langsam kleiner

Anmerkungen zur Hardy–Ramanujan Formel

Wie genau gilt die Formel

$$p(N)|_{N\gg 1} \approx \frac{1}{4N\sqrt{3}}\, e^{2\pi\,\sqrt{N/6}} =: p_{\mathrm{HR}}(N)$$

und ab wann ist N "gross genug"?

- Probiere Zahlen ab 20: relativer Fehler wird langsam kleiner
- Beweisidee: verwende Eulersche Zustandsumme ($p(0) := 1$, $|q| < 1$)

$$W(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = 1+q+2q^2+3q^3+5q^4+7q^5+11q^6+\dots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$$

Anmerkungen zur Hardy–Ramanujan Formel

Wie genau gilt die Formel

$$p(N)|_{N\gg 1} \approx \frac{1}{4N\sqrt{3}}\, e^{2\pi\sqrt{N/6}} =: p_{\rm HR}(N)$$

und ab wann ist N "gross genug"?

- Probiere Zahlen ab 20: relativer Fehler wird langsam kleiner
- Beweisidee: verwende Eulersche Zustandsumme ($p(0) := 1$, $|q| < 1$)

$$W(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = 1+q+2q^2+3q^3+5q^4+7q^5+11q^6+\cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$$

und verwende Residuensatz

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{W(q)}{q^{n+1}}\, \mathrm{d}q$$

Anmerkungen zur Hardy–Ramanujan Formel

Wie genau gilt die Formel

$$p(N)|_{N\gg 1} \approx \frac{1}{4N\sqrt{3}}\, e^{2\pi\sqrt{N/6}} =: p_{\mathrm{HR}}(N)$$

und ab wann ist N "gross genug"?

- Probiere Zahlen ab 20: relativer Fehler wird langsam kleiner
- Beweisidee: verwende Eulersche Zustandsumme ($p(0) := 1$, $|q| < 1$)

$$W(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = 1+q+2q^2+3q^3+5q^4+7q^5+11q^6+\dots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$$

und verwende Residuensatz

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{W(q)}{q^{n+1}}\, \mathrm{d}q$$

- einfache Auswertung des Integrals in Beweis von D.J. Newman (1962)

$$W(q) \approx \sqrt{\frac{1-q}{2\pi}}\, e^{\frac{\pi^2}{12}\,\frac{1+q}{1-q}}$$

- ergibt Hardy–Ramanujan Resultat für $p(n)$ im limes grosser n

Anmerkungen zur Hardy–Ramanujan Formel

Wie genau gilt die Formel

$$p(N)|_{N\gg 1} \approx \frac{1}{4N\sqrt{3}}\, e^{2\pi\sqrt{N/6}} =: p_{\mathrm{HR}}(N)$$

und ab wann ist N “gross genug”?

- Probiere Zahlen ab 20: relativer Fehler wird langsam kleiner
- Beweisidee: verwende Eulersche Zustandsumme ($p(0) := 1$, $|q| < 1$)

$$W(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = 1+q+2q^2+3q^3+5q^4+7q^5+11q^6+\cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$$

und verwende Residuensatz

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{W(q)}{q^{n+1}}\, \mathrm{d}q$$

- einfache Auswertung des Integrals in Beweis von D.J. Newman (1962)
- ergibt Hardy–Ramanujan Resultat für $p(n)$ im limes grosser n
- exakte Formel von Rademacher

Zustandsummen in Mathematik und Physik

Betrachten allgemeine “Zustandsumme”

$$W(q) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)\, q^n = w(0) + w(1)\, q + w(2)\, q^2 + \dots$$

- Mathematik: q hat buchhalterische Funktion; Interesse gilt $w(n)$

Zustandsummen in Mathematik und Physik

Betrachten allgemeine “Zustandsumme”

$$W(q) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)\, q^n = w(0) + w(1)\, q + w(2)\, q^2 + \dots$$

- Mathematik: q hat buchhalterische Funktion; Interesse gilt $w(n)$
- Physik: q beinhaltet beispielsweise Temperatur; Interesse gilt $W(q)$

Zustandsummen in Mathematik und Physik

Betrachten allgemeine "Zustandsumme"

$$W(q) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)\, q^n = w(0) + w(1)\, q + w(2)\, q^2 + \dots$$

- Mathematik: q hat buchhalterische Funktion; Interesse gilt $w(n)$
- Physik: q beinhaltet beispielsweise Temperatur; Interesse gilt $W(q)$
- Verwende Boltzmann's Formel um Entropie zu erhalten

$$S = \log W(q)$$

Zustandsummen in Mathematik und Physik

Betrachten allgemeine “Zustandsumme”

$$W(q) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)\, q^n = w(0) + w(1)\, q + w(2)\, q^2 + \dots$$

- Mathematik: q hat buchhalterische Funktion; Interesse gilt $w(n)$
- Physik: q beinhaltet beispielsweise Temperatur; Interesse gilt $W(q)$
- Verwende Boltzmann’s Formel um Entropie zu erhalten

$$S = \log W(q)$$

- Schlüsselfrage: wie bestimmt man $W(q)$ für Schwarze Löcher?

Zustandsummen in Mathematik und Physik

Betrachten allgemeine "Zustandsumme"

$$W(q) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)\, q^n = w(0) + w(1)\, q + w(2)\, q^2 + \dots$$

- Mathematik: q hat buchhalterische Funktion; Interesse gilt $w(n)$
- Physik: q beinhaltet beispielsweise Temperatur; Interesse gilt $W(q)$
- Verwende Boltzmann's Formel um Entropie zu erhalten

$$S = \log W(q)$$

- Schlüsselfrage: wie bestimmt man $W(q)$ für Schwarze Löcher?
- Anwort darauf beantwortet viele unserer Entropiefragen!

Zustandsummen in Mathematik und Physik

Betrachten allgemeine "Zustandsumme"

$$W(q) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)\, q^n = w(0) + w(1)\, q + w(2)\, q^2 + \dots$$

- Mathematik: q hat buchhalterische Funktion; Interesse gilt $w(n)$
- Physik: q beinhaltet beispielsweise Temperatur; Interesse gilt $W(q)$
- Verwende Boltzmann's Formel um Entropie zu erhalten

$$S = \log W(q)$$

- Schlüsselfrage: wie bestimmt man $W(q)$ für Schwarze Löcher?
- Anwort darauf beantwortet viele unserer Entropiefragen!
- TU Wien Strategie: betrachte einfache Schwarze Löcher in weniger als drei Raumdimensionen

Zustandsummen in Mathematik und Physik

Betrachten allgemeine “Zustandsumme”

$$W(q) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)\, q^n = w(0) + w(1)\, q + w(2)\, q^2 + \dots$$

- Mathematik: q hat buchhalterische Funktion; Interesse gilt $w(n)$
- Physik: q beinhaltet beispielsweise Temperatur; Interesse gilt $W(q)$
- Verwende Boltzmann’s Formel um Entropie zu erhalten

$$S = \log W(q)$$

- Schlüsselfrage: wie bestimmt man $W(q)$ für Schwarze Löcher?
- Anwort darauf beantwortet viele unserer Entropiefragen!
- TU Wien Strategie: betrachte einfache Schwarze Löcher in weniger als drei Raumdimensionen
- Dieselben konzeptuellen Probleme wie in höheren Dimensionen, aber weniger technische Probleme

Weiche Heisenberghaare als Mikrozustände

- Heisenbergalgebra ($n, m \in \mathbb{Z}$):

$$[J_n,\ J_m] = n\,\delta_{n+m,\,0}$$

Weiche Heisenberghaare als Mikrozustände

- Heisenbergalgebra ($n, m \in \mathbb{Z}$):

$$[J_n,\ J_m] = n\,\delta_{n+m,\,0}$$

- Quantenvakuum:

$$J_n|0\rangle = 0 \qquad \forall n \geq 0$$

Weiche Heisenberghaare als Mikrozustände

- Heisenbergalgebra ($n, m \in \mathbb{Z}$):

$$[J_n,\, J_m] = n\,\delta_{n+m,\,0}$$

- Quantenvakuum:

$$J_n|0\rangle = 0 \qquad \forall n \geq 0$$

- Mikrozustände:

$$|N; \{n_i\}\rangle = \prod_{n_i>0} J_{-n_i}|0\rangle \qquad \sum_i n_i = N$$

Weiche Heisenberghaare als Mikrozustände

- Heisenbergalgebra ($n, m \in \mathbb{Z}$):

$$[J_n,\ J_m] = n\,\delta_{n+m,\,0}$$

- Quantenvakuum:

$$J_n|0\rangle = 0 \qquad \forall n \geq 0$$

- Mikrozustände:

$$|N;\{n_i\}\rangle = \prod_{n_i>0} J_{-n_i}|0\rangle \qquad \sum_i n_i = N$$

- Physikalischer Zusammenhang zur Masse: $N \sim M$

Weiche Heisenberghaare als Mikrozustände

- Heisenbergalgebra ($n, m \in \mathbb{Z}$):

$$[J_n,\, J_m] = n\,\delta_{n+m,\,0}$$

- Quantenvakuum:

$$J_n|0\rangle = 0 \qquad \forall n \geq 0$$

- Mikrozustände:

$$|N;\{n_i\}\rangle = \prod_{n_i>0} J_{-n_i}|0\rangle \qquad \sum_i n_i = N$$

- Physikalischer Zusammenhang zur Masse: $N \sim M$
- Physikalischer Zusammenhang zwischen Masse und Fläche:

$$A \sim \sqrt{M} \sim \sqrt{N} \qquad \text{genauer: } A = 8\pi\,\sqrt{\frac{N}{6}}$$

Weiche Heisenberghaare als Mikrozustände

- Heisenbergalgebra ($n, m \in \mathbb{Z}$):

$$[J_n,\ J_m] = n\,\delta_{n+m,\,0}$$

- Quantenvakuum:

$$J_n|0\rangle = 0 \qquad \forall n \geq 0$$

- Mikrozustände:

$$|N;\{n_i\}\rangle = \prod_{n_i>0} J_{-n_i}|0\rangle \qquad \sum_i n_i = N$$

- Physikalischer Zusammenhang zur Masse: $N \sim M$
- Physikalischer Zusammenhang zwischen Masse und Fläche:

$$A \sim \sqrt{M} \sim \sqrt{N} \qquad \text{genauer: } A = 8\pi\sqrt{\frac{N}{6}}$$

- Entropie durch Hardy–Ramanujan:

$$S = \ln p(N) \sim 2\pi\sqrt{\frac{N}{6}} \sim \frac{A}{4} = S_{\mathrm{BH}}$$